Autoreferat

1. Imię i nazwisko:

   Łukasz Balbus

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe/artystyczne z podaniem nazwy, miejsca i roku ich pozyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej

   - 2004, Politechnika Wrocławska, uzyskanie tytułu magistra inżyniera matematyki o specjalności Statystyka Matematyczna na podstawie pracy magisterskiej pt. *Gry na procesach Markova.*
   - 2008, Politechnika Wrocławska, uzyskanie tytułu doktora inżyniera matematyki na podstawie rozprawy doktorskiej pt. *Równowagi Nasha w grach dynamicznych: istnienie i aproksymacja*

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych/artystycznych

   - 2008-2012, Politechnika Wrocławska, zatrudnienie na stanowisku asystenta
     - Byłem zatrudniony na stanowisku asystenta naukowo-dydaktycznego. Praca naukowa była skoncentrowana wokół teorii gier i zastosowań w ekonomii matematycznej.
     - Praca dydaktyczna obejmowała prowadzenie wykładów i ćwiczeń ze standardowych kursów matematycznych, oraz prowadzenie laboratoriów z metod numerycznych, a także wykładów i laboratoriów z kursu *pakiety matematyczne* na temat programów Matlab i Mathematica.
   - od 2012, Uniwersytet Zielonogórski, zatrudnienie na stanowisku asystenta
     - Jestem zatrudniony na stanowisku adiunkta naukowo-dydaktycznego. Kontynuuję badania dotyczące teorii gier z naciskiem na zastosowanie w ekonomii matematycznej, oraz modelowania zjawisk ekonomicznych na potrzeby badań ekonomicznych.
     - Praca dydaktyczna obejmuje prowadzenie wykładów i ćwiczeń z następujących kursów: ekonomia matematyczna, modelowanie w finansach, szeregi czasowe, modelowanie szeregami czasowymi, ekonometria dynamiczna i finansowa po angielsku, podstawy inżynierii finansowej, metody reprezentacyjne i statystyka matematyczna. Prowadzę również indywidualne nauczanie teorii gier dla zagranicznych studentów z programu Erasmus. Oprócz prowadzenia kursów dydaktycznych byłem promotorem kilku prac licencjackich. Tematyka, którą dotąd oferowałem studentom, dotyczy głównie narzędzi matematycznych, które można wykorzystać w naukach ekonomicznych, np. ekonometria, szeregi czasowe i wielokryterialne wspomaganie decyzji.

Bal

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2017 r. poz. 1789):

   (a) tytuł osiągnięcia naukowego/artystycznego,

   Teoria równowagi w modelach z międzypokoleniowym altruizmem

   (b) Publikacje wchodzące w skład osiągnięcia pod w.w. tytułem:

   - Balbus, Ł., Reffett, K. i Woźny, Ł. (2012 JME). Stationary Markovian equilibria in altruistic stochastic OLG models with limited commitment. Journal of Mathematical Economics, tom 48, str. 115-132,
     IF2012: 0.321, 5YIF2012: 0.454, MNiSW: 15p, cytowania: 16.
   - Balbus, Ł., Reffett, K. i Woźny Ł., (2013 JEDC). A constructive geometrical approach to the uniqueness of Markov stationary equilibrium in stochastic games of intergenerational altruism. Journal of Economic Dynamics and Control, tom 37 (5), str. 1019-1039,
     IF2013: 1.057, 5YIF2013: 1.347, MNiSW: 25p, cytowania: 9.
   - Balbus, Ł. , Jaśkiewicz, A. i Nowak A.S. (2014 Springer) Robust Markov Perfect Equilibria in a Dynamic Choice Model with Quasi-hyperbolic Discounting. In: Haunschmied J., Veliov V., Wrzaczek S. (eds) Dynamic Games in Economics. Dynamic Modeling and Econometrics in Economics and Finance, vol 16. Springer, Berlin, Heidelberg,
     MNiSW 5.
   - Balbus, Ł. i Woźny Ł., (2016 DGAA). Strategic dynamic programming methods for studying short memory equilibria in a class of stochastic games with uncountable number of states, Dynamic Games and Applications, tom 6(2), str. 187-208,
     IF2016: 1.467, 5YIF2016: 1.551, MNiSW 2016: 25p.
   - Balbus, Ł., Jaśkiewicz, A. i Nowak, A.S. (2015 GEB). Stochastic bequest games. Games and Economic Behavior, tom 90, str. 247-256,
     IF2016: 0.882, 5YIF2016: 1.283, MNiSW 2016: 30p.
   - Balbus, Ł., Jaśkiewicz, A. i Nowak, A.S. (2015 JOTA). Existence of stationary Markov perfect equilibria in stochastic altruistic growth economies. Journal of Optimization Theory and Applications, tom 165(1), str. 295-315,
     IF2015: 1.116, 5YIF2016: 1.384, MNiSW 2016: 35p.
   - Balbus, Ł., Jaśkiewicz, A. i Nowak, A.S. (2016 JME). Non-paternalistic intergenerational altruism revisited. Journal of Mathematical Economics, tom 63, str. 27-33,
     IF2016 0.597, 5IF 0.625, MNiSW: 15p.
   - Balbus, Ł., Reffett, K. i Woźny, Ł. (2018 JET). On uniqueness of time-consistent Markov policies for quasi-hyperbolic consumers under uncerta-

Bal

inty. Journal of Economic Theory,
tom 176, str. 293-310,
IF 1,204, 5IF 1,541, MNiSW 2015: 30p.

- Balbus, Ł. (2019 TMNA). Markov Perfect Equilibria in OLG models with risk sensitive agents. Topological Methods in Nonlinear Analysis, opublikowana, DOI: 10.12775/TMNA.2019.016,
IF 0,645, 5IF 0,781, MNiSW 2015: 35p.
- Balbus, Ł.,Jaśkiewicz, A. i Nowak, A.S. (2019 DGAA). Equilibria in Altruistic Economic Growth Models. Dynamic Games and Applications, opublikowana, DOI: 10.1007/s13235-019-00305-3,
IF 1,073, 5IF 1,354, MNiSW 2015: 25p.

(c) Omówienie celu naukowego/artystycznego w.w. pracy/prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.

Cykl publikacji zatytułowany jest *Teoria równowagi w modelach z międzypokoleniowym altruizmem.* Prace, które wskazuję, tworzą jednotematyczny cykl publikacji w rozumieniu ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (art. 16, ust. 2).

Celem prowadzonych badań jest sformułowanie, opis i analiza modeli opisujących problem następujących po sobie pokoleń eksploatujących zasoby naturalne. Pokolenie z jednej strony dąży do jak największej eksploatacji dostępnych zasobów, ale nie powinno być obojętne na los przyszłego pokolenia. Opisywane modele wyczerpują znamiona altruizmu międzypokoleniowego, ponieważ interes przyszłego pokolenia znajduje odzwierciedlenie w funkcji użyteczności dzisiejszej generacji. Ponieważ jednak bieżąca generacja inaczej postrzega interes następcy niż samo nastepne pokolenie, następuje tu konflikt interesów. W związku z powyższym powyższe modele można opisać za pomocą teorii gier niekooperacyjnych. Wyżej wymienione prace poruszają następujące problemy badawcze, które częściowo nakładają się na siebie:

- Czasowa niespójność podejmowanych decyzji w modelach paternalistycznych,
- Altruizm z cechami paternalistycznymi,
- Altruizm z cechami niepaternalisycznymi.

Czasowa niespójność podejmowanych decyzji w modelach paternalistycznych

W przedstawionych pracach rozważam problem konsumpcji odnawialnych zasobów w następujących po sobie okresach. Osoba decyzyjna planuje własną konsumpcję wg aktualnych preferencji określonych na ścieżkach konsumpcyjnych. Zaproponowane modele mogą być zinterpretowane na dwa sposoby: konsument żyje przez wiele okresów, ale preferencje na ścieżkach konsumpcyjnych

Bel

zmieniają się w czasie (por. Strotz [94], Peleg i Yaari [82], Kydland i Prescott [62]), oraz sytuacja, gdy w każdym okresie żyje oddzielne pokolenie konsumentów, a każde z nich ma swoje preferencje (por. Phelps i Pollak [83], Arrow [5], Kohlberg [57]). W obu wymienionych sytuacjach występuje problem *niespójności czasowej decyzji.*

Moim pierwszym podejściem do problemu *czasowej niespójności* i *ograniczonych zobowiązań decyzji* była analiza modelu spadków wielopokoleniowych. W pracach ze współautorami Balbus, Reffett, Woźny (2012 JME, 2013 JEDC) [19, 20], Balbus, Jaśkiewicz, Nowak (2015 GEB) [10] rozważam najprostszą postać modelu, gdy preferencje są reprezentowane przez użyteczność zależną od konsumpcji własnej i bezpośredniego następcy. Występuje tu altruizm, który będę nazwać *altruizmem prostym.* Podobne modele rozważali wcześniej Kohlberg [57], Lane i Mitra [65], Leininger [66], Amir [4] i Nowak [79]. W tego typu modelach występuje problem ograniczonych zobowiązań, które polegają na tym, że każde pokolenie najchętniej zachęciłoby następne do konsumpcji jak największej liczby pozostawionych w spadku zasobów, ale nie ma narzędzi, aby je do tego zobowiązać. To oraz zmieniające się preferencje kolejnych pokoleń prowadzi do problemu niespójności czasowej polityki. Oznacza to, że optymalna ścieżka konsumpcyjna dla bieżącego pokolenia może nie być optymalna dla następnego.

W pracy ze współautorami (Balbus, Reffett i Woźny (2013,JEDC)) [20] wykazaliśmy istnienie stacjonarnej *równowagi doskonałej* w klasie funkcji Lipschitzowskich. Przy dodatkowych założeniach wykazaliśmy jednoznaczność równowagi w szerokiej klasie funkcji mierzalnych i ograniczonych. Do udowodnienia tego twierdzenia wykorzystaliśmy twierdzenie Guo, Cho, Zhu [47] o punktach stałych operatorów monotonicznych zdefiniowanych na stożkach. Co więcej, kolejne iteracje funkcji najlepszych odpowiedzi prowadzą nas jednostajnie do jedynej równowagi. Daje to narzędzie do aproksymacji równowagi doskonałej poprzez kolejne iteracje funkcji najlepszych odpowiedzi. O tym, że jednoznaczność równowagi doskonałej jest praktycznie niespotykana w tego typu modelach, świadczy jeden z naszych przykładów, w którym nieznacznie osłabiliśmy założenia i otrzymaliśmy istnienie dokładnie trzech różnych równowag. W dotychczasowej literaturze autorzy koncentrowali się jedynie na problemie istnienia jakiejkolwiek równowagi doskonałej w różnych klasach funkcji np. Kohlberg [57], Leininger [66], Lane i Leininger [64] oraz Amir [4], natomiast w zakresie jednoznaczności, aproksymacji i zbieżności schematów aproksymacyjnych do równowagi istniała wyraźna luka badawcza. Co prawda powstały nieliczne prace w kierunku aproksymacji, ale dotyczyły tylko dyskontowanych gier stochastycznych (np. [17, 97]) i w tamtych pracach założenia były dość restrykcyjne: np. w [17] gra była symetryczna, a w [97] prawdopodobieństwo przejścia miało addytywna formę. Podobne wyniki otrzymaliśmy w pracy Balbus, Reffett, Woźny (2012,JME) [19]. W odróżnieniu od pracy z JEDC model został zmodyfikowany w taki sposób, że pokolenie oprócz poziomu konsumpcji

Bal

i inwestycji kapitału wybiera również podaż pracy na rzecz przyszłych pokoleń. Oprócz wymienionych wyników, prace z JEDC i JME dostarczają szereg innych interesujących wyników: istnienie rozkładów niezmienniczych generowanych przez równowagową dynamikę gospodarki, statykę komparatywną równowagi doskonałej względem parametru, metody numeryczne pozwalające obliczyć jedyną równowagę. W szczególności równowagę doskonałą można aproksymować za pomocą równowagi w grze ze skończonym horyzontem czasowym.

Już w wyżej wymienionych pracach widać, że istnienie stacjonarnej równowagi doskonałej jest wystarczająco trudnym problemem, a jednoznaczność i aproksymowalność równowag wymaga szeregu dodatkowych założeń. W związku z powyższym, w kolejnej pracy koncentruję się głownie na problemie istnienia równowagi doskonałej na możliwie najogólniejszych modelach *prostego altruizmu*. O ile standardowe założenia o ścisłej wklęsłości funkcji użyteczności z własnej konsumpcji są nadal akceptowalne, to dotychczasowe założenia na funkcję przejścia zostały znacznie osłabione. Szczególnie ważne jest, żeby założenie o funkcji prawdopodobieństwa przejścia obejmowała funkcję deterministyczną (np. Cobba i Douglasa, CES) oraz funkcję o rozkładzie nieatomowym. Taką cechę posiada prawdopodobieństwo przejścia w kolejnym artykule (Balbus, Jaśkiewicz i Nowak (2015,GEB)) [10], w której przestrzeń kapitału jest nieograniczona. Podobny model rozważał Leininger [66], ale on rozważał deterministyczną funkcję przejścia i ograniczoną przestrzeń stanów. W naszym artykule wykazujemy istnienie równowagi doskonałej w zbiorze funkcji inwestycji, które są rosnące i dolnie półciągłe oraz zbiór funkcji zadany jest ze *słabą topologią*. Podobną metodę zastosowali Majumdar i Sundaram [69] oraz Dutta i Sundaram [41] w grach stochastycznych, ale oni ograniczyli swoje rozważania do funkcji na ograniczonej przestrzeni kapitału.

Altruizm z cechami paternalistycznymi

Altruizm może mieć różny zasięg i różne cechy. Mówimy, że altruizm jest paternalistyczny, jeśli użyteczność pokolenia zależy od jego konsumpcji i od *konsumpcji* niektórych lub wszystkich przyszłych pokoleń. Natomiast altruizm jest niepaternalistyczny, jeśli użyteczność pokolenia zależy od jego własnej konsumpcji i *użyteczności* niektórych lub wszystkich przyszłych pokoleń. Modele w pracach przedstawionych w poprzedniej części cechował altruizm paternalistyczny. Są również inne modele paternalistyczne wychodzące poza ten schemat.

Choć najogólniejszy model altruizmu paternalistycznego w dotychczasowej literaturze podali Bernheim i Ray [31], najbardziej popularnym modelem tego typu altruizmu jest altruizm *quasi-hiperboliczny*, który wprowadzili Phelps i Pollak [83]. Funkcja użyteczności jest sumą chwilowych użyteczności z konsumpcji własnej i przyszłych pokoleń, a chwilowe użyteczności są zdyskontowane przez stały współczynnik altruistyczny i kolejne stałe czynniki dyskonta z okresu na okres. Podobna funkcja użyteczności występuje w wielu innych

Bal

problemach, np. Harris i Laibson [48], Laibson [63], Karp [54], oraz w wielu grach dynamicznych np. Chade, Prokopovych i Smith [35], Alj i Haurie [1], Balbus i Nowak [18] oraz L. Maliar i S. Maliar ([70]).

Modele altruizmu quasi-hiperbolicznego przedstawiliśmy w pracach Balbus i Woźny (2016, DGAA) [27] oraz Balbus, Reffett i Woźny (2018, JET) [26]. W pierwszej z wymienionych prac udowadniamy istnienie równowagi doskonałej w klasie strategii Markowowskich zdefiniowanych na nieprzeliczalnej przestrzenii stanów. W tym celu zastosowaliśmy metodę, wzorując się częściowo na pracy Abreu, Pearce i Strachetti [2], oraz na pracy Mertensa i Partasarathyego [77] którzy rozpatrywali gry stochastyczne. W szczególności pokazujemy charakteryzację zbioru wszystkich wartości użyteczności w równowadze Markowa, która jest przekrojem rodziny zbiorów zstępujących i zwartych w odpowiednio dobranej *słabej topologii*. Nasza metoda jest jedną z wielu modyfikacji metody Abreu, Pearce i Stracchettiego. Inne metody można również spotkać u takich autorów jak Cole, Kocherlakota [37], Judd, Yeltekin, Conklin [53], Doraszelski, Escobar [40], Sleet, Yeltekin [92], Feng, Miao, Peralta-Alva, Santos [43]. Niewątpliwą zaletą w.w. metod jest możliwość osłabienia wielu dodatkowych założeń, które są potrzebne do użycia Twierdzenia Kakutaniego o punkcie stałym. W szczególności używana przez nas metoda nie wymaga wypukłości poszczególnych zbiorów. Natomiast wadą wzystkich w.w. metod jest zbyt szeroka klasa zbioru równowag, co powoduje, że nie zawsze jesteśmy zweryfikować czy równowaga ma pożądane własności, np. czy jest stacjonarna.

W drugiej z wymienionych prac dotyczących dyskontowania quasi-hiperbolicznego zweryfikowaliśmy problem istnienia i jednoznaczności stacjonarnej równowagi. W dotychczasowej literaturze można było znaleźć głównie warunki istnienia równowagi (por. Harris i Laibson [48], Alj i Haurie [1], oraz Balbus i Nowak [18]). Z kolei we wszcześniejszej naszej pracy Balbus, Reffett i Woźny [23] mamy jedynie istnienie największej i najmniejszej równowagi, natomiast Laibson [63] podaje warunki na jednoznaczność istnienia równowagi w grze ze skończonym horyzontem czasowym. Uzyskanie jednoznaczności *stacjonarnej równowagi doskonałej* w grze z nieskończonym horyzontem czasowym wymaga znacznie bardziej restrykcyjnych założeń na prawdopodobieństwo przejścia niż praca Balbus i Woźny (2015, DGAA) [27]. Pozwalamy jednak, żeby funkcja wartości w równowadze była nieograniczona z góry. W tym celu wykorzystujemy pomysł Rincón-Zapatero i Rodríguez-Palmero ([86, 87]) i konstruujemy lokalną kontrakcję z przesunięciem 1, którego punkt stały jest jedyny i jest to wypłata w jedynej stacjonarnej równowadze doskonałej. Co więcej, kolejne iteracje tego operatora zbiegają do jedynej wypłaty równowagowej, a zbieżność jest jednostajna na każdym zwartym podzbiorze przestrzeni stanów. Nasz wynik daje również narzędzie do obliczeń numerycznych wypłaty równowagowej. Już w pracach L. Maliar i S.Maliar ([70]) widać, że obliczenie numeryczne równowagi jest skomplikowanym problemem. Nasza praca zawiera również inne wyniki jak komparatywne statyki, własność Lipschitza ze stałą 1, a także róż-

Bal

niczkowalność strategii równowagowych.

Celem kolejnej pracy ze współautorami Balbus, Jaśkiewicz i Nowak (2015, JOTA) [11] jest wykazanie istnienia *stacjonarnej równowagi doskonałej określonej* na nieprzeliczalnej przestrzeni stanów przy możliwie najsłabszych założeniach. Prezentowany przez nas model również ma cechy altruizmu paternalistycznego i obejmuje dyskontowanie quasi-hiperboliczne jako szczególny przypadek. Zakładamy, że funkcja prawdopodobieństwa przejścia zwraca nieatomową miarę probabilistyczną. Wykazujemy wtedy istnienie stacjonarnej równowagi doskonałej na przestrzeni rosnących i dolnie półciągłych funkcji inwestycji ze *słabą topologią*. Nasza praca jest ściśle związana z pracą Bernheima i Raya [31], którzy rozważali deterministyczną funkcję przejścia. Jednak jeden z naszych przykładów wskazuje, że problem istnienia równowagi doskonałej w pracy Berheima i Raya [31] jest nadal problemem otwartym. Jako argument podajemy, że operator najlepszych odpowiedzi nie jest ciągły ze *słabą topologią* w modelu Bernheima i Raya. Z tego względu nie jest możliwe w nim zastosowanie Twierdzenia Schaudera-Tichonowa, a nasza praca pokazuje, że na tym polu jest jeszcze wiele ciekawych problemów otwartych. Oprócz istnienia równowagi doskonałej nasza praca zawiera również wyniki dotyczące istnienia rozkładu niezmienniczego przy założeniu, że pokolenia stosują stacjonarną strategię równowagową. Przy najogólniejszych warunkach wykazujemy, że dla każdej strategii równowagowej istnieje co najmniej jeden rozkład niezmienniczy. Ponadto podajemy informacje na temat struktury porządkowej w sensie stochastycznej dominacji. Dokładniej, zbiór rozkładów niezmienniczych jest niepustym *łańcuchowo-zupełnym (ang. chain complete)* zbiorem. Wynik ten różni się od pracy Balbus, Reffett i Woźny (2013, JEDC) [20] ponieważ tam udowadniamy, że zbiór rozkładów niezmienniczych ma strukturę antyłańcucha, co jest mocniejszą własnością, ale w tamtej pracy przyjęliśmy znacznie bardziej restrykcyjne założenia dotyczące prawdopodobieństwa przejścia. W pracy Balbus, Jaśkiewicz i Nowak (2015, JOTA) [11] formułujemy również warunki na istnienie jedynego rozkładu niezmienniczego. Do udowodnienia w.w. twierdzeń używamy wyników prac [72] i [50].

Gra wielogeneracyjna z dyskontowaniem quasi-hiperbolicznym pojawiła się również w pracy Balbus, Jaśkiewicz i Nowak (2014 Springer) [9], która jest jednym z rozdziałów w monografii *Dynamic Games in Economics* wydanej przez Springera. W odróżnieniu od wyżej wymienionych modeli, prawdopodobieństwo przejścia było nieznane dla decydenta. Dokładniej, prawdopodobieństwo zależało od parametru (czynników zewnętrznych), który był nieznany dla osób decyzyjnych i nigdy nie został odkryty. W związku z powyższym zasadne jest określenie nowej funkcji użyteczności, która nie zależałaby od wartości parametru. Przyjęliśmy założenia, że osoby decyzyjne szukają strategii odpornej na niekorzystne wartości nieznanego parametru. Prowadzi to do problemu znalezienia tzw. strategii *maksyminowej* dla każdego pokolenia, czyli zastosowanie pomysłu Gilboa i Schmeidlera [45] w grach stochastycznych. Równowaga w

Bal

tego typu grze nazywana jest *równowagą odporną*, czyli jest to układ strategii taki, że każde pokolenie maksymalizuje swoją użyteczności przy założeniu, że parametr przyjmie skrajnie niekorzystną wartość dla nich. Wykazaliśmy istnienie równowagi odpornej w klasie rosnących i dolnie półciągłych funkcji inwestycji. Z uwagi na obecność dodatkowego parametru problem był na tyle skomplikowany, że była potrzeba przyjęcia założenia, że prawdopodobieństwo przejścia będzie miało podobną postać jak w pracy Balbus, Reffett i Woźny (2013 JEDC) [20].

Altruizm z cechami niepaternalisycznymi

Altruizm z cechami niepaternalistycznymi jest rozważany przez wielu autorów w ekonomii: np. Barro [30], Loury [68], Ray [84]. Użyteczność dla pokoleń można opisać za pomocą *rekursywnych użyteczności*, które wprowadził Koopmans [58], a jego rozważania rozszerzyli Kreps i Porteus [61], Kreps [60] oraz Epstein i Zin [42]. Epstein i Zin rozważają najbardziej ogólny model takiej użyteczności, gdzie kolejne ścieżki konsumpcyjne są losowe, a zależność od losowej funkcji użyteczności następcy jest parametryzowana przez tzw. *równoważnik pewności*. Jest on uogólnieniem wartości oczekiwanej umotywowanym przez eksperymenty Ellsberga i Allais, które wskazują, że preferencje graczy w kasynie odbiegają od wartości oczekiwanej. Maksymalna użyteczność dla bieżącego pokolenia może być zapisana jako rozwiązanie uogólnionych równań Bellmana. Inne równoważniki pewności znane z literatury to *entropijna miara ryzyka* postulowana przez Weila [102], która jest szczególnym przypadkiem *quasi-arytmetycznej średniej* wprowadzonej przez Chew [36]. Inne równoważnik można znaleźć w takich pracach jak Koopmans, Diamond i Williamson [59], Dekel [38], Gul [46]. Z uwagi na *dynamiczną zgodność* oraz *transwersalność* rekursywnej użyteczności, optymalna ścieżka konsumpcyjna dla bieżącego pokolenia (jeśli istnieje) będzie zgodna z optymalną polityką każdego następnego pokolenia. W związku z powyższym problem istnienia równowagi jest tożsamy z problemem istnienia optymalnej polityki dla każdego zadanego pokolenia i nie występuje tu problem *niespójności czasowej* polityki. W szczególności jak widać w pracy Saez Marti i Weibulla [89], Markowowski Proces Decyzyjny opisany przez Samuelsona [90], Blackwella [33] lub Straucha [93] może być przedstawiony zarówno jako proces jednego decydenta, jak i proces decyzyjny wielu pokoleń, a równowaga doskonała pokrywa się z optymalną polityką dla wszystkich pokoleń.

W pracy ze współautorami, Balbus, Jaśkiewicz i Nowak (2016,JME) [13] rozważamy model altruizmu, który ma cechy niepaternalistyczne. Rozważamy model Raya [84], u którego preferencje bieżących pokoleń reprezentowane są przez użyteczność zależną od użyteczności wszystkich przyszłych pokoleń. To powoduje, że funkcja użyteczności jest bardziej ogólna niż u Koopmansa [58] czy Epsteina i Zina [42] i przypomina bardziej funkcję rozpatrywaną przez Galpertiego i Struloviciego [44]. Poprzez podanie przykładu wskazujemy, że

Bel

istnienie równowagi doskonałej w modelu Raya [84] jest problemem otwartym. W zamian przyjmujemy założenie, że prawdopodobieństwo następnego stanu jest miarą nieatomową i pokazujemy istnienie stacjonarnej równowagi doskonałej.

Altruistyczne modele z cechami paternalistycznymi i niepaternalistycznymi jako pierwszy opisał Hori [51]. Hori rozważał model deterministyczny. Kolejna moja praca Balbus (2019, TMNA) [6] dotyczy rozszerzenia modelu Horiego na przypadek gdy funkcja przejścia między stanami jest losowa. Motywacją do podjęcia i rozszerzenia badań jest nie tylko możliwość stworzenia modelu który obejmie modele paternalistyczne (np. Laibson [63], Harris i Laibson [48], Alj i Haurie [1]) i niepaternalistyczne (Loury [68], Ozaki i Streufert [81], Marinacci i Montrucchio [71], Le-Van i Vailakis [67], [32] i [34]), ale również naturalna interpretacja, że preferencje pokoleń żyjących kilka okresów łączą obie cechy paternalistycznymi i niepaternalistyczne (np. Doepke i Zilibotti [39]). W opisywanej pracy przyjąłem dosyć ogólne założenia dotyczące funkcji agregacyjnej preferencji, która jest zwężająca względem jednego z argumentów. Skonstruowałem lokalną kontrakcję z przesunięciem 1 i używając pomysłu Rincón-Zapatero i Rodríguez-Palmero [86, 87] oraz wyników Nowaka i Matkowskiego [76], a także Martins-da-Rocha i Vailakisa [73] wykazałem istnienie jedynej funkcji rekursywnej użyteczności w klasie funkcji lokalnie ograniczonych. Korzystając z powyższych wyników, skonstruowałem multifunkcję najlepszych odpowiedzi i za pomocą twierdzenia Kakutaniego o punkcie stałym wykazałem istnienie równowagi doskonałej w klasie markowowskich strategii mieszanych (por. Balbus i Nowak [18], Nowak [80] oraz He i Sun [49]).

Najnowszą pracą, którą chciałbym przedstawić w niniejszym cyklu jest praca ze współautorami Balbus, Ł.,Jaśkiewicz, A. i Nowak, A.S. (2019, DGAA) [15]. Podobnie jak w pracy Balbus (2019, TMNA) [6], opisujemy model łączący cechy paternalistyczne i niepaternalistyczne. Ponadto znajdujemy równowagę doskonałą w klasie strategii czystych, które jako inwestycje są funkcjami rosnącymi stanu. Również w odróżnieniu od wcześniejszej pracy Balbus, Jaśkiewicz, Nowak (2015, GEB) [10] funkcja agregacyjna nie ma formy addytywnej. To uogólnienie ma nie tylko znaczenie matematyczne, ale także ekonomiczne ponieważ rozszerza możliwość zastosowania naszych wyników w szerszej klasie modeli ekonomicznych np. poprzez zastosowanie funkcji agregacyjnej Koopmansa, Diamonda i Williamsona [59] między bieżącą konsumpcją, a zagregowaną konsumpcją i użytecznością przyszłego pokolenia. Jednak w odróżnieniu od pracy Balbus (2019, TMNA) [6] przyjmujemy dodatkowe założenie na funkcję agregacyjną, jak dodatkowa agregacja konsumpcji potomka i jego użyteczności. Dokładniej, funkcja agregacyjna z użyteczności konsumenta zależy do konsumpcji następcy tylko poprzez funkcję agregacyjną zależną od konsumpcji i inwestycji. Podobnie jak w pracy Balbus (2019, TMNA) [6] wykazaliśmy istnienie jedynej rekursywnej użyteczności w klasie funkcji ograniczonych w sensie normy wagowej. Jednak w dowodzie wykorzystaliśmy twierdzenie Mat-

Bal

kowskiego [75], które uogólnia Twierdzenie Banacha o kontrakcji. Następnie wykazaliśmy istnienie czystej równowagi doskonałej za pomocą twierdzienia Schaudera i Tichnonova o punkcie stałym.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych (artystycznych).

Oprócz prac objętych jednotematycznym cyklem publikacji, prowadzone przeze mnie badania zaowocowały wieloma innymi publikacjami. Prace te były w większym, lub w mniejszym stopniu powiązane z pracami wymienionymi w cyklu. Moje publikacje obejmowały głównie dynamiczne gry supermodularne oraz statyczne gry supermodularne z continuum graczy.

Najbliżej związaną pracą z cyklem tematycznym była praca z współautorami Balbus, Reffett i Woźny [23], która została opublikowana w *International Journal of Game Theory*, prace Balbus, Jaśkiewicz i Nowak ([12, 14]), Balbus, Jaśkiewicz, Nowak i Woźny [16] a także [25] artykuł przeglądowy na temat gier dynamicznych w ekonomii napisany wspólnie z K. Reffettem i Ł.Woźnym. Praca Balbus, Reffett i Woźny [23]) była preludium do pracy tych samych autorów [26]. Również opisywany jest problem gry wielogeneracyjnych z dyskontowaniem quasi-hiperbolicznym. Za pomocą twierdzenia Tarskiego udowadniamy istnienie najmniejszej i największej równowagi doskonałej, które są punktami stałymi dwóch, możliwie różnych, ale porównywalnych ze sobą operatorów. Co więcej iterując po kolei ten największy operator otrzymujemy ciąg kolejnych przybliżeń największej równowagi, natomiast iterując najmniejszy operator otrzymujemy ciąg kolejnych przybliżeń najmniejszej równowagi. W dotychczasowych znanych nam pracach za pomocą Twierdzenia Kakutaniego lub Fana-Gliksberga wykazano jedynie istnienie równowag, natomiast niewiele było wiadomo o strukturach porządkowych zbioru równowag w grach dynamicznych (por. Alj i Haurie [1], Harris i Laibson [48]). Kolejne blisko związane prace z cyklem tematycznym zostały napisane z innymi współautorami Balbus, Jaśkiewicz i Nowak ([12, 14]). Wszystkie prace dotyczą gier z altruizmem paternalistycznym, przy czym ostatnia z wymienionych uogólnia modele z altruizmem quasi-hiperbolicznym. Praca Balbus, Jaśkiewicz i Nowak [12] rozszerza wyniki Leiningera [66] na przypadek, gdy mamy nieograniczoną z dołu funkcję użyteczności. Do udowodnienia istnienia równowagi proponujemy alternatywną metodę szukając równowagi w zbiorze funkcji dolnie półciągłych ze słabą topologią. Podobną metodę stosują Sundaram [96], Majumdar i Sundaram [69] i Dutta i Sundaram [41] w grach stochastycznych. Ponadto precyzujemy założenia, aby każda selekcja funkcji najlepszych odpowiedzi była funkcją rosnącą. Leininger z góry to założył tą własność. Ponadto podaliśmy przykłady modeli które były znacznie ogólniejsze niż przykłady Leiningera. W pracach [14] i [16] również posługujemy się słabą topologią. W [14] rozważamy model z dyskontowaniem quasi -hiperbolicznym, a w [16] rozważamy model spadków międzypokoleniowych (p. [27]). Do naszego problemu dostosowujemy metodę z [27], ale w odróżnieniu od tamtej pracy nie zakładamy stacjonarności modelu, a przestrzeń kapitału jest nieograniczona.

Bell

Wraz z współautorami (Balbus, Reffett i Woźny [21, 22]) opublikowałem również dwie prace z zakresu stochastycznych gier supermodularnych. W pracy opublikowanej w *Journal of Economic Theory* [21] otrzymaliśmy istnienie największej równowagi w zbiorze strategii stacjonarnych. Uzyskanie istnienia ekstremalnych równowag było możliwe dzięki założeniu o supermodularności. Obie ekstremalne równowagi można otrzymać jako monotoniczne iteracje równowag w grach ze skończonym horyzontem. Porównując z wcześniejszą pracą Balbus i Nowak [18] rozważali grę symetryczną, która jednak nie była grą supermodularną. Podobne wyniki otrzymaliśmy w *Dynamic Games and Applications* [22], gdzie rozważaliśmy Bayesowską wersję gry supermodularnej.

Wraz ze współautorami Balbus, Dziewulski, Reffett i Woźny [7, 8] opublikowaliśmy dwie prace w *Economic Theory*. W obu z nich rozważamy problem istnienia i aproksymacji dystrybucyjnej równowagi Nasha w sensie Mas-Colella [74] i Schmeidlera [91] w statycznej, dużej grze supermodularnej. W [8] analizujemy dużą grę ze strategicznymi komplementarnościami. Pokazujemy jak formalnie zdefiniować zjawisko komplementarności w takim środowisku (na przestrzeni strategii (por. Schmeidler 1973) i w grach dystrybucyjnych (por. Mas Colell 1984)) i udowadniamy pewne własności przestrzeni strategii (mierzalnych funkcji) odwzorowujących graczy do ich zbiorów akcji. Podobnie dla gier dystrybucyjnych pokazujemy jak zdefiniować zjawisko komplementarności na rozkładach i wykazujemy pewne własności zbiorów rozkładów z odpowiednimi porządkami. W pracy podajemy warunki na istnienie równowagi (Nasha oraz dystrybucyjnej) w obu modelach oraz metodę obliczania wybranych elementów ze zbioru równowag. Nasze założenia o istnieniu są inne niż w dotychczasowej literaturze (por. Balder [28], Ali Khan [55] i Wiszniewska-Matyszkiel [101]). Oprócz istnienia udowadniamy, że ekstremalne równowagi w obu grach można scharakteryzować poprzez statykę komparatywną. Wyniki te rozszerzają wcześniejsze prace dotyczące gier supermodularnych ze skończoną liczbą graczy: Vives [99], Milgrom i Roberts [78]. Pracę kończą szczegółowe zastosowania do (nieagregatowych) dużych gier np. w zakresie modeli dysonansu społecznego (np. Akerlof [3]), gier z wyborem czasu stopowania, czy modeli ze współzależną konsumpcją (ang. keeping up with the Joneses).

W pracy [7] rozważamy grę ze zróżnicowaną informacją. Definiujemy dostępną informację i zachowanie komplementarne w takich warunkach i przedstawiamy wyniki o istnieniu równowagi Bayesa-Nasha, ich obliczania oraz statyki komparatywnej. W ten sposób rozszerzamy wyniki Baldera i Rustichiniego [29] oraz Kima i Yannelisa [56] do gier supermodularnych. Jako przykłady zastosowań podajemy wyjaśnienie zachowań niezadowolonego tłumu (ang. *riot games*), metody wyceny aktywów na niezupełnych rynkach finansowych, czy aukcji wspólnej wartości. W tej pracy uogólniamy także metody dotyczące warunków pozwalających na agregację porządkowych własności typu quasi-supermodularność oraz własność jednokrotnego przecięcia, nawiązując do wyników Quaha i Struloviciego [85].

Wraz ze współautorami Balbus, Reffett i Woźny [24] również opublikowaliśmy notę

Bally

dotyczącą dużych gier supermodularnych. Pokazaliśmy że topologie porządkowe i przedziałowe na zbiorach uporządkowych nie są równoważne w zbiorach które mają istotnie większą moc niż *continuum* (dokładniej topologia przedziałowa nie ma bazy przeliczalnej). To powoduje, że rodzina zbiorów borelowskich może wyjść poza klasę generatorów przedziałowych, a także fakt, że funkcje monotoniczne nie muszą być mierzalne względem sigma ciała zbiorów borelowskich. To powoduje pewne ograniczenia w konstrukcji modeli ekonomicznych np. w przypadku bayesowskich dużych gier. Mianowicie, jeśli będziemy wymagać by prawie wszyscy gracze podejmowali decyzje niezależnie, należałoby założyć, że przestrzeń charakterystyk graczy jest *nasycona* (p. Sun [95]). Wtedy moc zbioru graczy musiałaby mieć istotnie większą moc niż continuum. To jednak oznaczałoby, że moc zbioru charakterystyk graczy musiałby mieć moc istotnie większą niż continuum. Z naszych rezultatów wynika, że to wtedy nie implikuje, że funkcja monotoniczna jest funkcją borelowską i założenie kardynalnych komplementarności (np. Vives i Van Zandt [100]) nie byłoby pomocne w przypadku nasyconej dużej gry.

Literatura

[1] Alj A. i Haurie A. (1983). Dynamic Equilibria in Multigeneration Stochastic Games. IEEE Transactions on Automatic Control, tom 28(2), str. 193-203.

[2] Abreu D., Pearce D., Stacchetti E. (1990). Toward a Theory of Discounted Repeated Games with Imperfect Monitoring. Econometrica, tom 58(5), str. 1041-1063.

[3] Akerlof G. (1997). Social Distance and social decisions. Econometrica, tom 65(5), 1005-1027,

[4] Amir R. (1996). Strategic intergenerational bequests with stochastic convex production. Economic Theory, tom 8, str. 367-376.

[5] Arrow K. J. (1973). Rawls's principle of just saving. Swedish Journal of Economics, tom 74, str. 323-355.

[6] **Balbus, Ł. (2019). Markov Perfect Equilibria in OLG models with risk sensitive agents. Topological Methods in Nonlinear Analysis, opublikowana, DOI: 10.12775/TMNA.2019.016,**
IF2017 0.645, 5YIF 0.781 ,MNiSW 35.

[7] **Balbus Ł., Dziewulski P., Reffett K. i Woźny Ł. (2015). Differential information in large games with strategic complementarities. Economic Theory, tom 59(1), str. 201–243.**
IF2015 1.137, 5YIF 1.356 ,MNiSW 25.

Bel

[8] Balbus Ł., Dziewulski P., Reffett K. i Woźny Ł. (2017). A qualitative theory of large games with strategic complementarities. Economic Theory, str. 1-27, https://doi.org/10.1007/s00199-017-1075-7.
IF2017 1.108, 5YIF 1.322 ,MNiSW 25.

[9] Balbus, Ł. , Jaśkiewicz, A. i Nowak A.S. (2014). Robust Markov Perfect Equilibria in a Dynamic Choice Model with Quasi-hyperbolic Discounting. In: Haunschmied J., Veliov V., Wrzaczek S. (eds) Dynamic Games in Economics. Dynamic Modeling and Econometrics in Economics and Finance, vol 16. Springer, Berlin, Heidelberg.
MNiSW 5.

[10] Balbus, Ł., Jaśkiewicz, A. i Nowak, A.S. (2015). Stochastic bequest games. Games and Economic Behavior, tom 90, str. 247-256.
IF2015 0.882, 5YIF 1.283 ,MNiSW 30.

[11] Balbus, Ł., Jaśkiewicz, A. i Nowak, A.S. (2015). Existence of stationary Markov perfect equilibria in stochastic altruistic growth economies. Journal of Optimization Theory and Applications, tom 165(1), str. 295-315,
IF2015 1.16, 5YIF 1.384 ,MNiSW 35.

[12] Balbus Ł., Jaśkiewicz A., Nowak A.S. (2015). Bequest games with unbounded utility functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, tom 427, str. 515-524,
IF2015 1.014, 5YIF 1.130 ,MNiSW 35.

[13] Balbus Ł., Jaśkiewicz A., Nowak A.S. (2015). Non-paternalistic intergenerational altruism revisited. Journal of Mathematical Economics, tom 63, str. 27-33,
IF2015 0.597, 5YIF 0.625 ,MNiSW 15.

[14] Balbus Ł., Jaśkiewicz A., Nowak A.S. (2018). Markov perfect equilibria in a dynamic decision model with quasi-hyperbolic discounting. Annals of Operations Research, str. 1-19, https://doi.org/10.1007/s10479-018-2778-2,
IF 1.864, 5IF 1.943, MNiSW 30.

[15] Balbus Ł., Jaśkiewicz A., Nowak A.S. (2019). Equilibria in Altruistic Economic Growth Models. Dynamic Games and Applications, opublikowana, DOI: 10.1007/s13235-019-00305-3,
IF2015 1.073, 5YIF 1.354 ,MNiSW 25.

[16] Balbus Ł., Jaśkiewicz A., Nowak A.S. i Woźny Ł. (2017). A note on Markov perfect equilibria in a class of non-stationary stochastic bequest games. Journal of Mathematical Analysis and Applications, tom 427,

Bal

str. 515-524,
IF2015 1.138, 5YIF 1.239 ,MNiSW 40.

[17] Balbus Ł. i Nowak A.S. (2004). Construction of Nash equilibria in symmetric stochastic games of capital accumulation. Mathematical Methods of Operations Research, tom 60, str. 267-277.

[18] Balbus Ł. i Nowak A.S. (2008). Existence of perfect equilibria in a class of multigenerational stochastic games of capital accumulation. Automatica, str 44, 1471-1479.

[19] **Balbus, Ł., Reffett, K. i Woźny, Ł. (2012). Stationary Markovian equilibria in altruistic stochastic OLG models with limited commitment. Journal of Mathematical Economics, tom 48, str. 115-132,**
IF2012 0.321, 5YIF2012 0.454 ,MNiSW 15.

[20] **Balbus, Ł., Reffett, K. i Woźny Ł. (2013). A constructive geometrical approach to the uniqueness of Markov stationary equilibrium in stochastic games of intergenerational altruism. Journal of Economic Dynamics and Control, tom 37 (5), str. 1019-1039, IF2013 1.057, 5YIF2013 1.347 ,MNiSW 25.**

[21] **Balbus Ł., Reffett K. i Woźny Ł. (2014). A constructive study of Markov equilibria in stochastic games with strategic complementarities. Journal of Economic Theory, tom 150, str. 815-840,**
IF2015 1.033, 5YIF 1.634 ,MNiSW 30.

[22] **Balbus Ł., Reffett K. i Woźny Ł. (2013). Markov Stationary Equilibria in Stochastic Supermodular Games with Imperfect Private and Public. Dynamic Games and Applications, tom 3(2), str. 187-206,**
IF2013 1.041, 5YIF2013 1.102 ,MNiSW 10.

[23] **Balbus Ł., Reffett K. i Woźny Ł. (2015). Time consistent Markov policies in dynamic economies with quasi-hyperbolic consumers. International Journal of Game Theory, tom 44, str. 83-112,**
IF2013 0.577, 5YIF2013 0.713 ,MNiSW 15.

[24] **Balbus Ł., Reffett K. i Woźny Ł. (2015). Games and Economic Behavior. Monotone equilibria in nonatomic supermodular games.A comment. Games and Economic Behavior, tom 94, str. 182–187, IF2015 0.882, 5YIF 1.283 ,MNiSW 30.**

[25] **Balbus Ł., Reffett K. and Woźny Ł. (2016). Dynamic Games in Macroeconomics. monografia pod redakcją Basara T., Zaccoura G. z serii**

Bał

Handbook of Dynamic Game Theory. Springer, Cham. MNiSW 5.

[26] **Balbus Ł., Reffett, K. i Woźny Ł. (2018). On uniqueness of time-consistent Markov policies for quasi-hyperbolic consumers under uncertainty. Journal of Economic Theory, tom 176, str. 293-310, IF2017 1.102, 5YIF2017 1.541 ,MNiSW 30.**

[27] **Balbus Ł. i Woźny Ł., (2016). Strategic dynamic programming methods for studying short memory equilibria in a class of stochastic games with uncountable number of states. Dynamic Games and Applications, tom 6(2), str. 187-208, IF2016 1.467, 5YIF2013 1.551 ,MNiSW 25, Cytowania (Web of Science 2, Scopus).**

[28] Balder. E.J. (1995) A Unifying Approach to Existence of Nash Equilibria. International Journal of Game Theory, tom 24, str.79-94.

[29] Balder E.J., Rustichini A. (1994). An equilibrium result for games with private information and infinitely many players. Journal of Economic Theory, tom 62(2), str. 385-393.

[30] Barro R. J. (1974). Are Government Bonds Net Wealth? Journal of Political Economy, tom 82(6), str. 1095-1117.

[31] Bernheim B.D. i Ray D. (1989). Markov Perfect Equilibria in Altruistic rowth Economies with Production uncertainty. Journal of Economic Theory, tom 47, str. 195-202.

[32] Bich P., Drugeon J.P. i Morhaim L. (2018). On temporal aggregators and dynamic programming. Economic Theory, DOI 10.1007/s00199-017-1045-0.

[33] Blackwell D. (1962). The Annals of Mathematical Statistics, tom 33(2), str. 719-726.

[34] Bloise G. i Vailakis V. (2018). Convex dynamic programming with (bounded) recursive utility. Journal ofEconomicTheory, tom 173, str. 118-141.

[35] Chadea H., Prokopovych P., Smith L. (2008). Repeated games with present-biased preferences. Journal of Economic Theory, tom 139, str. 157-175.

[36] Chew (1983). A generalization of the quasilinear mean with applications to the measurement of income inequality of decision theory resolving the Allais paradox. Econometrica, tom 51, nr. 4, 1065-1092.

[37] Cole H.L. i Kocherlakota N. (2001). Dynamic Games with Hidden Actions and Hidden States. Journal of Economic Theory, tom 98, str. 114-126

Balb

[38] Dekel E. (1986). An Axiomatic Characterization of Preferences under Uncertainty: Weakening the Independence Axiom. Journal of Economic Theory, tom 40, str. 304-318.

[39] Doepke M. i Zilibotti F. (2017). Parenting with style: altruism and paternalism in intergenerational preference transmission. Econometrica, tom 85(5), str. 1331-1371.

[40] Doraszelski U., Escobar J.F. (2012). Restricted feedback in long term relationships. Journal of Economic Theory, tom 147, str. 142-161.

[41] Dutta P. and Sundaram R. (1992). Markovian equilibrium in a class of stochastic games: existence theorems for discounted and undiscounted models. Economic Theory, tom 2, str. 197-214.

[42] Epstein L.G. i Zin S.E. (1989). Substitution, risk aversion and the temporal of consumption and asset returns: a theoretical framework. Econometrica, tom 57(4), str. 937-969.

[43] Feng Z., Miao J., Peralta-Alva A.,Santos M.S. (2014). Numerical simulation of nonoptimal dynamic equilibrium models. International Economic Reviews, tom 55(1), str. 83-110.

[44] Galperti S. i Strulovici B. (2017). A theory of intergenerational altruism. Econometrica, tom 85(4), 1175-1218.

[45] Gilboa I. i Schmeidler D. (1989). Maxmin expected utility with non-unique prior. Journal of Mathematical Economics, tom 18, 141-153.

[46] Gul F. (1991). A theory of disappointment aversion. Econometrica, tom 57(3), str. 667-686.

[47] Guo D., Cho Y.J. and Zhu J. (2004). Partial Ordering Methods in Nonlinear Problems. Nova Science Publishers, Inc. New York.

[48] Harris H. i Laibson D. (2001). Dynamic Choices of Hyperbolic Consumers. Econometrica, tom 69(4), str. 935-957.

[49] He W. i Sun Y. (2017). Stationary Markov perfect equilibria in discounted stochastic games. Journal of Economic Theory, tom 169, str. 35-61.

[50] Hopenhayn H.A. i Prescott E.C. (1992). Stochastic Monotonicity and Stationary Distributions for Dynamic Economies. Econometrica, tom 60(6), str. 1387-1406.

[51] Hori H. (1997). Dynamic Allocation in an Altruistic Overlapping Generations Economy. Journal of Economic Theory, tom 73, str. 292-315.

Bals

[52] Jaśkiewicz A., Matkowski J. i Nowak A.S. (2014). On variable discounting in dynamic programming: applications to resource extraction and other economic models. Annals of Operations Research, tom 220, str. 263-278.

[53] Judd K.L., Yeltekin S., Conklin J. (2003) Computing supergame equilibria. Econometrica, tom 71(4), str.1239-1254.

[54] Karp L. (2005) Global warming and hyperbolic discounting. Journal of Political Economy, tom 89, str. 261-282.

[55] Khan A.M. (1989). On Cournot-Nash equilibrium distributions for games with a nonmetrizable action space and upper semicontinuous payoffs. Transactions of the American Mathematical Society. tom 315(1), str. 127-146.

[56] Kim T., Yannelis N.C. (1997). Existence of equilibrium in Bayesian games with infinitely many players. Journal of Economic Theory, tom 77(2), str. 330-353.

[57] Kohlberg E. (1976). A Model of Economic Growth with Altruism between Generations. Journal of Economic Theory, tom 13, str. 1-13.

[58] Koopmans, T. (1964). Stationary Ordinal Utility and Impatience. Econometrica, tom 28(2), str. 207-309.

[59] Koopmans, T., P. Diamond, and R. Williamson (1964): Stationary utility and time perspective. Econometrica, tom 32, str. 82-100.

[60] Kreps D.M. (1979). A Representation Theorem for "Preference for Flexibility". Econometrica, tom 47(3), str. 565-577.

[61] Kreps D.M. i Porteus E.L. (1978). Temporal resolution of uncertainty and dynamic choice theory. Econometrica, vol. 46(1), str. 185-200.

[62] F.E. Kydland i E.C. Prescott (1977). Rules rather than discretion: the inconsistency of optimal plans. The Journal of Political Economy, tom 85(3), str. 473-492.

[63] Laibson D. (1997). Golden eggs and hyperbolic discounting. Quarterly Journal of Economics, tom 112(2), str. 443-477.

[64] Lane J., Leininger W. (1984). Differentiable Nash Equilibria in Altruistic Economies. Journal of Economics, tom 44(4), str. 329-347.

[65] Lane J., Mitra T. (1981). On Nash Equilibrium Programs of Capital Accumulation under Altruistic Preferences. International Economic Review, tom 22(2), str. 309-331

[66] Leininger W. (1986). The existence of perfect equilibria in model of growth with altruism between generations. Review of Economic Studies, tom 53, str. 349-368.

Bally

[67] Le-Van i Vailakis (2005). Recursive utility and optimal growth with bounded or unbounded returns. Journal of Economic Theory, tom 123, str. 187-209.

[68] Loury G.C. (1981). Intergenerational transfer and the distribution of earnings. Econometrica, tom 49(4), str. 843-867.

[69] Majumdar M. and Sundaram R. (1991). Symmetric Stochastic Games of Resource Extraction: The Existence of Non-Randomized Stationary Equilibrium. Stochastic Games and Related Topics, Shapley Honor Volume (redakcja: Raghavan T.E.S. Ferguson T.S., Parthasarathy T. i Vrieze J.), str. 175–190, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

[70] Maliar, L., Maliar S. (2016). Ruling Out Multiplicity of Smooth Equilibria in Dynamic Games: A Hyperbolic Discounting Example, tom 6(2), str. 243-261.

[71] Marinacci M. i Montrucchio L. (2010). Unique solutions for stochastic recursive utilities. Journal of Economic Theory, tom 145, str. 1776-1804.

[72] Markowsky G. (1976). Chain complete posets and directed sets with applications. Algebra Univ. tom 6, str 53-68.

[73] Martins-da-Rocha F.V. i Vailakis Y. (2010). Existence and uniqueness of a fixed point for local contractions. Econometrica, tom 78(3), str. 1127-1141.

[74] Mas-Colell A. (1984). On theorem of Schmeidler. Journal of Mathematical Economics, tom 13, str. 201-206.

[75] Matkowski J. (1975). Integral solutions of functional equations. Dissertationes Mathematicae, tom. 127, str. 1-68.

[76] Matkowski J. i Nowak A.S. (2011). On discounted dynamic programming with unbounded returns. Economic Theory, tom 46, str. 455-474.

[77] Mertens J.-F. i Parthasarathy T. (1987). Equilibria for discounted stochastic games. C.O.R.E. Discussion Paper 8750.

[78] Milgrom P., Roberts J. (1990). Rationalizability, Learning, and Equilibrium in Games with Strategic Complementarities. Econometrica, tom 58(6), str. 1255-1277.

[79] Nowak, A.S. (2006). On perfect equilibria in stochastic models of growth with intergenerational altruism. Economic Theory, tom 28, str. 73-83.

[80] Nowak A.S. (2010). On a Noncooperative Stochastic Game Played by Internally Cooperating Generations. Journal of Optimal Theory and Applications, tom 144, str. 88-106.

[81] Ozaki H., and Streufert P.A. (1996). Dynamic programming for non-additive stochastic objectives. Journal of Mathematical Economics, tom 25, str. 391-442.

Balle

[82] Peleg B, Yaari M (1973). On the existence of a consistent course of action when tastes are changing. Review of Economic Studies, tom 40(3), str. 391-401.

[83] Phelps E.S. and Pollak R.A. (1968). On Best National Savings and Game Equilibrium Growth. The Review of Economic Studies, tom 35(2), tom 185-199.

[84] Ray, D. (1987). Nonpaternalistic Intergenerational Altruism. Journal of Economic Theory, tom 41, str. 112-132.

[85] Quah J.H. i Strulovici B. (2012). Aggregating the single crossing property. Econometrica, tom 80(5), str. 2333-2348.

[86] Rincón-Zapatero, J.P., and Rodríguez-Palmero C. (2003). Existence and Uniqueness of Solutions to the Bellman Equation in the Uunbounded case. Econometrica, tom 71(5), str. 1519-1555. Corrigendum: 2009, tom 77(1), str. 317-318.

[87] Rincón-Zapatero, J.P., and Rodríguez-Palmero C. (2007). Recursive utility with unbounded aggregators. Economic Theory, tom 33(2), str. 381-391.

[88] Ray D. (1987). Nonpaternalistic Intergenerational Altruism. Journal of Economic Theory, tom 41, str. 112-132.

[89] Saez-Marti M. i Weibull J. (2005). Discounting and altruism to future decision-makers. Journal of Economic Theory, tom 122, str. 254-266.

[90] Samuelson P. (1937). A note on measurement of utility. Review of Economic Studies, tom 4, str. 155-161.

[91] Schmeidler D., (1973). Equilibrium points of nonatomic games. Journal of Statistical Physics, tom 7(4), str. 295-300.

[92] Sleet C, Yeltekin S (2016) On the computation of value correspondences. Dynamic Games and Applications, tom 6(2), str. 174-186.

[93] Strauch R. (1966). Negative dynamic programming. Annals of Mathematical Statistics, tom 37, str. 871-890.

[94] Strotz R.H. (1956). Myopia and inconsistency in dynamic utility and maximization. Review of Economic Studies, tom 23(3), str. 169-180.

[95] Sun Y. (2006). The exact law of large numbers via Fubini extension and characterization of insurable risks. Journal of Economic Theory, tom 126, str. 31-69.

[96] Sundaram R. (1989). Perfect Equilibrium in Non-randomized Strategies in a Class of Symmetric Dynamic Games. Journal of Economic Theory, tom 47, str. 153-177.

[97] Szajowski P. (2006). Constructions of Nash Equilibria in Stochastic Games of Resource Extraction with Additive Transition Structure. Mathematical Methods of Operations Research, tom 63(2), str. 239-260.

Bol

[98] Tarski A. (1955). A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. Pacific Journal of Mathematics, tom 5, str. 285-309.

[99] Vives X. (1990). Nash equilibrium with strategic complementarities. Journal of Mathematical Economics, tom 19, str. 305-321.

[100] Vives X. i Van Zandt T. (2007). Monotone equilibria in Bayesian games of strategic complementarities. Journal of Economic Theory, tom 134, str. 339-360.

[101] Wiszniewska-Matyszkiel, A. (2000). Existence of pure equilibria in games with nonatomic space of players. Topological Methods Nonlinear Analysis, tom 16, str. 339-349.

[102] Weil, P. (1993). Preauctionary savings and the permanent income hypothesis. The Review of Economic Studies, tom 60, nr. 2, str. 367-383.

Bolby